PROCEEDINGS OF IAM, V11., N2., 2022, pp.203-220

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ПЛУНЖЕРА ШТАНГО-НАСОСНОЙ УСТАНОВКИ

А. Ф. Расулзаде[1], Н.С. Гаджиева[2] , Н.А. Исмаилов[2]
[1] Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan

e-mail: resulzadeaynur@gmail.com, nazile.m@mail.ru

Аннотация: В статье рассматривается задача нахождения оптимальной программной траектории и управления дискретными колебательными системами с жидкими демпферами по периодическому граничному условию в штанговой насосной установке. Во-первых, дискретизируются уравнение движения колебательной системы, граничные и периодические условия. Затем строятся квадратичный функционал и расширенный функционал, затем записываются уравнения Эйлера-Лагранжа для нахождения оптимальной траектории программы и управления. Наконец, предлагается эффективный алгоритм расчета. Результаты проиллюстрированы на числовом примере.

Ключевые слова: Колебательные системы, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра второго порядка, расширенный функционал, уравнения Эйлера-Лагранжа.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35, 11E04, 15A06.

1. Введение.

Колебательные системы с жидкими демпферами [2-4,28] отличаются от обычного [15,17,18,21,22] тем, что второй член сохраняет при себе производные с дробными порядками. Однако, в последнее время много внимания уделяется добыче нефти со штанго-насосной установкой [19,20], где движение плунжера описывается классическими уравнениями осциллятора [1,8,9,12,24]. По нашему мнению, такие постановки являются грубоватыми и, поскольку плунжер находится внутри Нютоновской жидкости, то движение будет описываться уравнениями с дробно-рациональным порядком во втором члене. Тогда проблема дискретизируется.

Поэтому, задача нахождения оптимальных траекторий и управлений для колебательных систем с жидкими демпферами, чему посвящена настоящая работа, является более интересной. Из свойства движения плунжера краевые условия берутся периодическими и переход движения с одного режима ко второму описывается импульсными системами. Метод решения сводится к построению расширенных функционалов и методу Лагранжа. Результаты иллюстрируются конкретным простым цифровым примером.

2. Постановка задачи.

Пусть движение колебательных систем с жидкостными демпферами при добыче нефти штанговой насосной установкой описывается системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными и границей вида [6,16,21,23,29]:

$$m_1\ddot{y}(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\ 0<x_0<x<l+x_0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(l+x_0+0)=y(l+x_0-0), \\ \dot{y}(l+x_0+0)=-\dot{y}(l+x_0-0)+V_1, \end{cases} \tag{2}$$

$$m_2\ddot{y}(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\ l+x_0<x<2l+x_0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} y(2l+x_0)=y(2l+x_0-0), \\ \dot{y}(2l+x_0)=-\dot{y}(2l+x_0-0)+V_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $y(x)$ искомая непрерывная функция, m_1, m_2, a, b, V_1, V_2 заданные постоянные числа, $f(x)$ кусочно непрерывная функция, $\alpha=\dfrac{p}{q}\in(1,2)$, p, q натуральные числа.

Пусть мы имеем следующее граничное условие как периодический случай

$$\begin{cases} y(2l)=y(0), \\ \dot{y}(2l)=\dot{y}(0), \end{cases} \tag{5}$$

Если дискретизировать задачу (1)-(4) и взять некоторые обозначения, то получим [13,21,24-30]:

$$W_{i+1}=\psi_i W_i+A_i W_0+F_i,\ i=\overline{0,2n-1}\ , \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&(-1 \quad 1)W_n = 0,\\
&(1 \quad 0)\left(W_{n+1} - W_n\right) = V_1,\\
&(-1 \quad 1)W_{2n} = 0,\\
&(-1 \quad 0)W_0 + (0 \quad 1)W_{2n} = 0,\\
&(-1 \quad 1)(W_0 + W_{2n}) = V_2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $W_n = \begin{pmatrix} y_{2n} \\ y_{2n+1} \end{pmatrix}$,

$$
A_i = \left(\left(\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{1<i_1<i_2<\ldots<i_k\le m-2} \prod_{j=1}^{k} \psi_{i_{k+1-j}} \right) \psi_0 + \psi_0 \right), F_i = \left(\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{1<i_1<i_2<\ldots<i_k\le m-2} \prod_{j=1}^{k} \psi_{i_{k+1-j}} F_{i_{k+1-j}} \right) + f_i, \tag{8}
$$

$$
\psi^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}^{(n-1)} & \mathrm{A}_{12}^{(n-1)} \\ \mathrm{A}_{21}^{(n-1)} & \mathrm{A}_{22}^{(n-1)} \end{pmatrix}, \psi^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}^{(k)} & \mathrm{A}_{12}^{(k)} \\ \mathrm{A}_{21}^{(k)} & \mathrm{A}_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{11}^{(n-1)}(a,n,h) &= 1 - h\left[a\,\frac{(x_{2n-2} - x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2n-4}) \right] + \\
&+2h\left[a\,\frac{(x_{2n-2} - x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2n-3}) \right],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\mathrm{A}_{12}^{(n-1)}(a,n,h) = 2 - h\left[a\,\frac{(x_{2n-2} - x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-2} - x_{2n-3}) \right], \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{21}^{(n-1)}(a,n,h)=-2-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+\\
&+4h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-\\
&h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-4})\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+\\
&h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\times\\
&\times\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{22}^{(n-1)}(a,n,h)=3-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-\\
&-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+\\
&+h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_{11}^{(k)}(a,n,h)=-2h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-2})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]\right.\\
&\left.+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k})\right]\right\},k=\overline{1,n-2},
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\mathrm{A}_{11}^{(0)}(a,n,h)=-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_0)\right],
\tag{15}
$$

$$A_{12}^{(k)}(a,n,h)=-h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]\right.$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k+1})\right]\right\},k=\overline{1,n-2}, \tag{16}$$

$$A_{12}^{(0)}(a,n,h)=2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_0)\right]-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_1)\right], \tag{17}$$

$$A_{21}^{(k)}(a,n,h)=-h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-2})\right]\right\}-\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-2})\right]-\right.$$
$$\left.-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]\right\}-$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-2})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]+$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]\right\},k=\overline{1,n-2}, \tag{18}$$

$$A_{21}^{(0)}(a,n,h)=-h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_0)\right]-$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_0)\right], \tag{19}$$

$$A_{22}^{(k)}(a,n,h) = -h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]-\right.$$
$$-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k})\right]+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k+1})\right]$$
$$-h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]+\right.$$
$$+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]+$$
$$\left.\left.+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k+1})\right]\right\}\right\},\ k=\overline{1,n-2},$$

(20)

$$A_{22}^{(0)}(a,n,h) = h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\left\{2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_0)\right]\right\}-$$
$$-\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_1)\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_0)\right]-$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_1)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_1)\right].$$

(21)

Требуется найти F_i, которые дают минимальное значение для квадратичного функционала:

$$J=\sum_{i=0}^{2n-1}W_i'QW_i+F_i'CF_i\to\min, \tag{22}$$

где $Q=Q'\geq 0$ представляет собой симметричную матрицу размерности $2n\times 2n$, $C\geq 0$ является матрицей размерности $2n\times 2n$, штрих означает операцию транспонирования.

3. Способ решения задачи.

Для решения задачи (5)-(21) построим расширенный функционал следующим образом [5,7,10,14,15,17]:

$$\overline{J}=\alpha\left((-1\quad 1)W_n\right)+\beta\left((1\quad 0)\left(W_{n+1}-W_n\right)-V_1\right)+\gamma\left((-1\quad 1)W_{2n}\right)+\xi\left((-1\quad 0)W_0+(0\quad 1)W_{2n}\right)+$$
$$+\eta\left((-1\quad 1)(W_0+W_{2n})-V_2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n-1}\left(W_i'QW_i+F_i'CF_i+\lambda_{i+1}{}^T\left(\psi_iW_i+A_iW_0+F_i-W_{i+1}\right)\right). \tag{23}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\eta,\xi$ скаляры, λ_i - is 1×2 размерный вектор-столбец. Тогда, аналогично [17-19,21], получаем из (23)

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial W_i}=QW_i+\psi_i{}^T\lambda_{i+1}-\lambda_i\ =0,\ i\neq 0,n,n+1,2n \tag{24}$$

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial F_i}=CF_i+\lambda_{i+1}\ =0,\ i=\overline{0,2n-1} \tag{25}$$

с условиями

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial W_0}=\xi(-1\quad 0)^T+\eta(-1\quad 1)^T+QW_0+\psi_0{}^T\lambda_1+\sum_{i=0}^{2n-1}A_i^T\lambda_{i+1}=0\ , \tag{26}$$

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial W_n}=\alpha(-1\quad 1)^T-\beta(1\quad 0)^T+QW_n+\psi_n{}^T\lambda_{n+1}-\lambda_n\ =0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial W_{n+1}}=\beta(1\quad 0)^T+QW_{n+1}+\psi_{n+1}{}^T\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}\ =0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\overline{J}}{\partial W_{2n}}=\gamma(-1\quad 1)^T+\xi(0\quad 1)^T+\eta(-1\quad 1)^T-\lambda_{2n}\ =0, \tag{29}$$

Если рассматривать уравнение (25) в уравнении (6), то уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи (24)-(29) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}W_{i+1}\\ \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_i & -C^{-1}\\ Q & \psi_i^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_i\\ \lambda_{i+1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_iW_0\\ \alpha(-1\quad 1)^T\end{pmatrix},i=\overline{0,2n-1}. \tag{30}$$

с условиями

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = A_0^{-T}\left(-\xi(-1\quad 0)^T - \eta(-1\quad 1)^T - QW_0 - \psi_0{}^T\lambda_1\right), \\
\lambda_2 = A_1^{-T}\left(-\xi(-1\quad 0)^T - \eta(-1\quad 1)^T - QW_0 - \psi_0{}^T\lambda_1\right), \\
. \\
. \\
. \\
\lambda_n = \alpha(-1\quad 1)^T - \beta(1\quad 0)^T + QW_n + \psi_n{}^T\lambda_{n+1}, \\
\lambda_{n+1} = \beta(1\quad 0)^T + QW_{n+1} + \psi_{n+1}{}^T\lambda_{n+2}, \\
. \\
. \\
. \\
\lambda_{2n-1} = A_{2n}{}^{-T}\left(-\xi(-1\quad 0)^T - \eta(-1\quad 1)^T - QW_0 - \psi_0{}^T\lambda_1\right), \\
\lambda_{2n} = \gamma(-1\quad 1)^T + \xi(0\quad 1)^T + \eta(-1\quad 1)^T.
\end{cases}
\tag{31}
$$

Поэтому решение задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & . & . & . & (-1\ \ 1) & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & (-1\ \ 0) & 0 & (1\ \ 0) & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & (-1\ \ 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(-1\ \ 0) & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & (0\ \ 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(-1\ \ 1) & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & (-1\ \ 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\psi_0 + A_0 & -C^{-1} & -I & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
A_{n-1} & 0 & . & . & \psi_{n-1} & -I & -C^{-1} & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_n & 0 & . & . & . & \psi_n & 0 & -I & 0 & . & -C^{-1} & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
A_{2n-1} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & \psi_{2n-1} & -I & -C^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q & \left(\psi_0{}^T + A_0{}^T\right) & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1\ \ 0)^T & (-1\ \ 1)^T \\
0 & 0 & . & . & . & Q & -I & 0 & \psi_n{}^T & . & . & . & 0 & 0 & (-1\ \ 1)^T & (-1\ \ 0)^T & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & Q & -I & . & \psi_{n+1}{}^T & . & 0 & 0 & 0 & (1\ \ 0)^T & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -I & 0 & 0 & (-1\ \ 1)^T & (0\ \ 1)^T & (-1\ \ 1)^T \\
0 & -I & Q & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & \psi_n{}^T & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & \psi_{2n-1}{}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
W_0 \\ \lambda_1 \\ . \\ . \\ . \\ W_n \\ \lambda_n \\ W_{n+1} \\ \lambda_{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ W_{2n} \\ \lambda_{2n} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \xi \\ \eta
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
V_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{32}
$$

Если определитель матрицы системы уравнений (32) отличен от нуля, то система (32) имеет единственное решение. Решить систему уравнений (32) можно с помощью пакета программ Matlab.

4. Пример:

Рассмотрим следующий пример, применяя описанный выше метод. Предположим, что задача поставлена следующим образом:

$$y''(x) + aD^{\alpha} y(x) = f(x), \tag{33}$$

$$\begin{cases} y(l+0) = y(l-0), \\ \dot{y}(l+0) = -\dot{y}(l-0) + V_1, \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} y(2l) = y(2l-0), \\ \dot{y}(2l) = -\dot{y}(2l-0) + V_2, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} y(2l) = y(0), \\ \dot{y}(2l) = \dot{y}(0), \end{cases} \tag{36}$$

После дискретизации задачи (33)-(36), аналогично (6)-(21) [1,8,9,12,13,21] , получим:

$$W_m = \varphi_{m-1} W_{m-1} + P_m W_0 + R_m, \qquad m \geq 2$$

$$\begin{cases} (-1 \quad 1) W_m = 0, \\ (1 \quad 0)\left(W_{m+1} - W_m\right) = V_1, \\ (-1 \quad 1) W_{2m} = 0, \\ (-1 \quad 0) W_0 + (0 \quad 1) W_{2m} = 0, \\ (-1 \quad 1)(W_0 + W_{2m}) = V_2. \end{cases}$$

где:

$$W_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, W_2 = \begin{pmatrix} y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \ldots, W_{m-2} = \begin{pmatrix} y_{2m-4} \\ y_{2m-3} \end{pmatrix}, W_{m-1} = \begin{pmatrix} y_{2m-2} \\ y_{2m-1} \end{pmatrix}, W_m = \begin{pmatrix} y_{2m} \\ y_{2m+1} \end{pmatrix}.$$

$$P_m = \left(\left(\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m-2} \prod_{j=1}^{k} \varphi_{i_{k+1-j}} \right) \varphi_0 + \varphi_0 \right),$$

$$R_m = \left(\sum_{k=1}^{m-2} \sum_{1<i_1<i_2<\ldots<i_k \le m-2} \prod_{j=1}^{k} \varphi_{i_{k+1-j}} F_{i_{k+1-j}} \right) + F_m \, .$$

Теперь решим эту задачу:
1.

$$m = 4, a = 1, b = 0, m_1 = m_2 = 1, \alpha = 1.6995, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_1 = 1, V_2 = 2.$$

2. $A_{m-1}, A_0, A_k, k = \overline{1, m-2}$ давайте вычислим значения выражений.

3. $W_{i+1} = \psi_i W_i + P_i W_0 + R_i$, $i = \overline{0,3}$

$$\begin{cases} W_1 = \psi_0 W_0 + R_0, \\ W_2 = \psi_1 W_1 + P_1 W_0 + R_1, \\ W_3 = \psi_2 W_2 + P_2 W_0 + R_2, \\ W_4 = \psi_3 W_3 + P_3 W_0 + R_3. \end{cases}$$

$$.\begin{cases} (-1 \quad 1) W_2 = 0, \\ (1 \quad 0)\left(W_3 - W_2\right) = 1, \\ (-1 \quad 1) W_4 = 0, \\ (-1 \quad 0) W_0 + (0 \quad 1) W_4 = 0, \\ (-1 \quad 1)(W_0 + W_4) = 2, \end{cases}$$

4. Функционал и расширенный функционал:

$$J = \sum_{i=0}^{3} W_i' W_i + R_i' R_i \to \min \, ,$$

$$\overline{J} = \alpha\left((-1 \quad 1) W_2\right) + \beta\left((1 \quad 0)\left(W_3 - W_2\right) - 1\right) + \gamma\left((-1 \quad 1) W_4\right) +$$
$$+ \xi\left((-1 \quad 0) W_0 + (0 \quad 1) W_4\right) + \eta\left((-1 \quad 1)(W_0 - W_4) - 2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3} \left(W_i' W_i + R_i' R_i + \lambda_{i+1}{}^{T} \left(\psi_i W_i + P_i W_0 + R_i - W_{i+1} \right) \right)$$

5. $$\frac{\partial \overline{J}}{\partial W_0} = \xi(-1 \quad 0)^T + \eta(0 \quad 1)^T + QW_0 + \psi_0{}^T\lambda_1 + A_0{}^T\lambda_1 + A_1{}^T\lambda_2 + A_2{}^T\lambda_3 + A_3{}^T\lambda_4 = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial W_2} = \alpha(-1 \quad 1)^T - \beta(1 \quad 0)^T + W_2 + \psi_2{}^T\lambda_3 - \lambda_2 \ = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial W_3} = \beta(1 \quad 0)^T + W_3 + \psi_3{}^T\lambda_4 - \lambda_3 \ = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial W_4} = \gamma(-1 \quad 1)^T + \xi(0 \quad 1)^T + \eta(-1 \quad 1)^T - \lambda_4 \ = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial W_1} = W_1 + \psi_1{}^T\lambda_2 - \lambda_1 \ = 0, \quad i \neq 0,2,3,4.,$$

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial R_i} = R_i + \lambda_{i+1} \ = 0, \Rightarrow R_i = -\lambda_{i+1}\ , \quad i = \overline{0,3}.$$

6. Использован программный пакет Matlab, чтобы построить матрицу решения задачи и найти неизвестные.

$$W_0 = \begin{pmatrix} -2.8655 \\ -0.8655 \end{pmatrix}, \quad W_1 = \begin{pmatrix} 0.4718 \\ -0.3789 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0.0237 \\ 0.0237 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} -0.9763 \\ -1.5657 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} -2.8655 \\ -2.8655 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -0.0278 \\ -0.4987 \end{pmatrix}, \ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0.4222 \\ -0.3412 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1.4266 \\ 1.1022 \end{pmatrix}, \ \lambda_4 = \begin{pmatrix} 1.3273 \\ 0.6857 \end{pmatrix},$$

$\alpha = -0.5733$, $\beta = -2.5236$, $\gamma = 1.1906$, $\eta = -2.5179$, $\xi = 2.0131$,

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0.0278 \\ 0.4987 \end{pmatrix}, \ R_1 = \begin{pmatrix} -0.4222 \\ 0.3412 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} -1.4266 \\ -1.1022 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} -1.3273 \\ -0.6857 \end{pmatrix}$$

7. $J = W_0'W_0 + R_0'R_0 + W_1'W_1 + R_1'R_1 + W_2'W_2 + R_2'R_2 + W_3'W_3 + R_3'R_3 = 18.7586.$

Теперь построим график зависимости регулятора, общее решение для каждого n в Matlab:

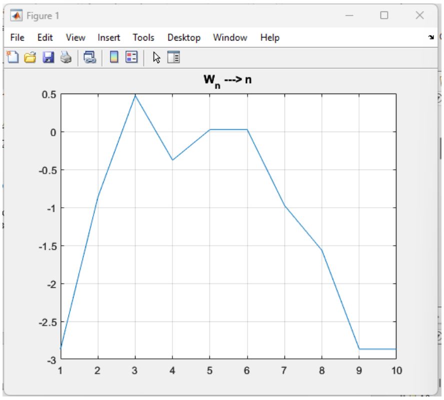

Рис. 1. График зависимости W_n от n

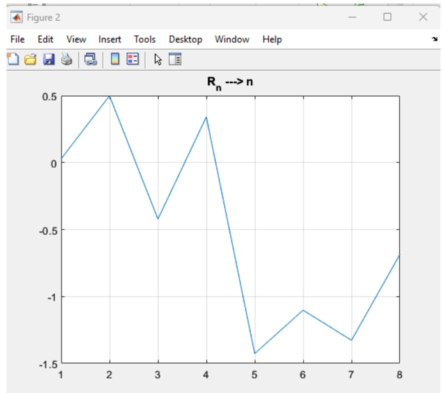

Рис. 2. График зависимости R_n от n

Авторы выражают благодарность академику Ф.А. Алиеву и профессору Н.А. Алиеву за постановку задачи и ценные советы при изучении рабочих рекомендаций по оформлению статьи.

Литература

1. Aliev F. A, Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Mamedova Y.V. Method of discretizing of fractional-derivative linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, arXiv preprint arXiv:1903.06468 2019/3/15 , https://arxiv.org/abs/1903.06468
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C., Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, N.4, 2021, pp. 115-121.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Ismailov N.A., Mamedova Y.V., Constructing of optimal regulators for liquid damper's oscillatory systems, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.II, 2020, pp.68-70.
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Applied and Computational Mathematics An International Journal, 2018, V.17,N.3, pp.317-322

5. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V., Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, V.7, N.2, 2021, pp.970-976.
6. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Mahmudov N., Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers, A Review, Vol.20, No.3, 2021, pp.339-365.
7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Calculation of the optimal stationary regulator, Soviet J. Comput. System Sci, 1985.
8. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A.Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics 55 (3), 332-341.
9. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int.Applied Mechanics , 2018, V.55 , N.1, pp.28-135
10. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identificationproblem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics , 2019, V.55, pp.110-116.
11. Aliev F.A., Ismailov N.A. The optimization of the periodic system with feedback on output variable Dokl. Akad. Nauk of Azerbaijan, 44 (4), pp.149-150
12. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, 2018, V.32, N.3, pp.1025-1033.
13. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci., 1998, 272 p.
14. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, 2022, 410 p.
15. Aliev F.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine , 2018, V.51,N.30, pp.323-330
16. Aliev N.A., Safarova N.A., Aliev F.A., Velieva N.I., Cauchy problem of the fractional order linear ordinary differential equations, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.I, 2020, pp.101-103.

17. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Velieva, N.I., Safarova, N.A., Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, Journal of Applied and Computational Mechanics, 6, 2020, 1426-1430.
18. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I., Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1978.
19. Aliev, F.A., Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, 1989.
20. Andreev, Yu.I., Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, 1976.
21. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional equations with constant coefficients. Appl. Math. Comp. 2007, v.187, p. 68-76.
22. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
23. Hajiyeva N.S., Rashidov A.M., Determination of optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers during oil production by sucker rod pumping unit, VI International scientific and practical conference "Applied Systems and Technologies in the Information Society", Kyiv, 30 september, 2022, pp.243-245.
24. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M., Essays on the Mathematical Theory of Systems, Mir, Moscow, 1972.
25. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional –Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.
26. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A., Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., V.5, N.1, 2014, pp. 130-137.
27. N.A. Aliev, N.İ. Velieva, K.G. Gasımova, A.F. Resulzade., Discretization Method On Movement Equation Of The Oscillating System With Liquid Dumpers, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.2, c. 211-228. (in russian)
28. Odibat Z.M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, // Computers & Mathematics with Applications 59 (3), pp.1171-1183.
29. Rasulzada A.F., Aliev N.A., Velieva N.I Algorithm For Determining Fractional Derivatives For Discrete Vibration Systems With A Liquid Damper, Proceedings of IAM, V.10, N.2, 2021, pp.181-191 (in russian)

30. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.

DETERMİNATİON OF THE OPTİMAL PROGRAM TRAJECTORY AND CONTROL FOR DİSCRETİZED MOVEMENT OF THE PLUNGER İN ROD PUMPİNG EQUİPMENT

A.F. Rasulzade[1], Hajiyeva N.S.[2], Ismailov N.A. [2]

[1] Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Applied Mathematics, BSU, Azerbaijan

e-mail:: resulzadeaynur@gmail.com, nazile.m@mail.ru

Abstract In the paper, the issue of finding the optimal program trajectory and control for discretized periodic boundary condition oscillatory systems with liquid dampers ın rod pumpıng equıpment is considered At the first, the equation of motion of the oscillating system, the boundary and periodicity conditions are discretized.Then, be established quadratic functional and extended functional, the Euler-Lagrange equations are written to find the optimal program trajectory and control. At the end, an effective calculation algorithm is proposed. Results are illustrated on a numerical example.

Keywords: oscillator system, fractional derivative, second order Volterra integral equation, Euler-Lagrange equations

References

1. Aliev F. A, Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Mamedova Y.V. Method of discretizing of fractional-derivative linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, arXiv preprint arXiv:1903.06468 2019/3/15 , https://arxiv.org/abs/1903.06468
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C., Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, N.4, 2021, pp. 115-121.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Ismailov N.A., Mamedova Y.V., Constructing of optimal regulators for liquid damper’s oscillatory systems, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.II, 2020, pp.68-70.

4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Applied and Computational Mathematics An International Journal, 2018, V.17,N.3, pp.317-322
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V., Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, V.7, N.2, 2021, pp.970-976.
6. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Mahmudov N., Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers, A Review, Vol.20, No.3, 2021, pp.339-365.
7. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Calculation of the optimal stationary regulator, Soviet J. Comput. System Sci, 1985.
8. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A.Computer Simulation of Crude Oil Extraction Using a Sucker Rod Pumping Unit in the Oil Well–Resevoir System, International Applied Mechanics 55 (3), 332-341.
9. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identification problem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int.Applied Mechanics , 2018, V.55 , N.1, pp.28-135
10. Aliev F.A., Hajieva N.S., Namazov A.A., Safarova N.A. The identificationproblem for defining the parameters of discrete dynamic system, Int. Applied Mechanics , 2019, V.55, pp.110-116.
11. Aliev F.A., Ismailov N.A. The optimization of the periodic system with feedback on output variable Dokl. Akad. Nauk of Azerbaijan, 44 (4), pp.149-150
12. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Asymptotic Method for Solution of Identification Problem of the Nonlinear Dynamic Systems, Filomat, 2018, V.32, N.3, pp.1025-1033.
13. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci., 1998, 272 p.
14. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, 2022, 410 p.
15. Aliev F.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine , 2018, V.51,N.30, pp.323-330

16. Aliev N.A., Safarova N.A., Aliev F.A., Velieva N.I., Cauchy problem of the fractional order linear ordinary differential equations, Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.I, 2020, pp.101-103.
17. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Velieva, N.I., Safarova, N.A., Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, Journal of Applied and Computational Mechanics, 6, 2020, 1426-1430.
18. Aliev, F.A., Larin, V.B., Naumenko, K.I., Suntsev, V.I., Optimization of Linear Time Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1978.
19. Aliev, F.A., Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Elm, Baku, 1989.
20. Andreev, Yu.I., Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, 1976.
21. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional equations with constant coefficients. Appl. Math. Comp. 2007, v.187, p. 68-76.
22. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, 1972.
23. Hajiyeva N.S., Rashidov A.M., Determination of optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers during oil production by sucker rod pumping unit, VI International scientific and practical conference "Applied Systems and Technologies in the Information Society", Kyiv, 30 september, 2022, pp.243-245.
24. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M., Essays on the Mathematical Theory of Systems, Mir, Moscow, 1972.
25. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional –Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.
26. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A., Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., V.5, N.1, 2014, pp. 130-137.
27. N.A. Aliev, N.İ. Velieva, K.G. Gasımova, A.F. Resulzade., Discretization Method On Movement Equation Of The Oscillating System With Liquid Dumpers, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.2, c. 211-228. (in russian)
28. Odibat Z.M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, // Computers & Mathematics with Applications 59 (3), pp.1171-1183.

29. Rasulzada A.F., Aliev N.A., Velieva N.I Algorithm For Determining Fractional Derivatives For Discrete Vibration Systems With A Liquid Damper, Proceedings of IAM, V.10, N.2, 2021, pp.181-191 (in russian)
30. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.